

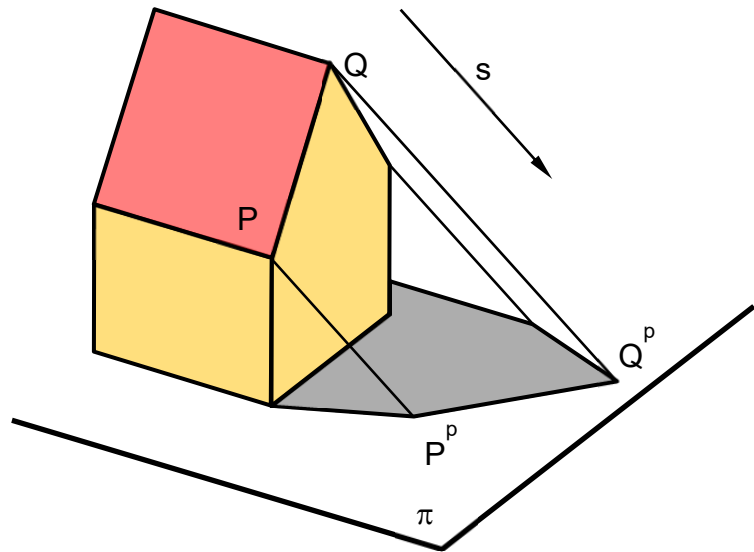
Projektionen:

Die darstellende Geometrie beschäftigt sich damit, **räumliche Objekte** in die **Ebene** abzubilden. Dies geschieht mit Hilfe von **Projektionen**. Eine Projektion, die uns die Natur vormacht, und die auch jeder schon erlebt hat, ist der Schattenwurf.

Was passiert dabei:
Lichtstrahlen, die auf ein Objekt treffen, erzeugen am Boden einen Schatten. Jede geometrische Projektion funktioniert ebenso.

Dabei entsprechen:

Sonne, oder Scheinwerfer	Projektionszentrum, Auge (Z oder O)
Lichtstrahlen	Projektionsstrahlen, Sehstrahlen (s)
Boden (verebnet)	Bildebene, Projektionsebene, Rissebene (π)
Schatten des Objektes	Bild, Riss, Ansicht des Objektes



Projektionsarten

Einer der Panzerknackerbrüder sitzt wieder einmal im Gefängnis. Tagsüber fällt Sonnenlicht in seine Zelle, welches das Gitter der Gefängniszelle am Boden wie in Bild 1 abbildet.

In der Nacht fällt ebenfalls Licht in die Zelle, das von einem Kontrollscheinwerfer kommt. Auch dieses Licht bildet das Gitter am Boden ab, siehe Bild 2.

Bild 1: Bild des Gitters bei Sonnenlicht am Tag

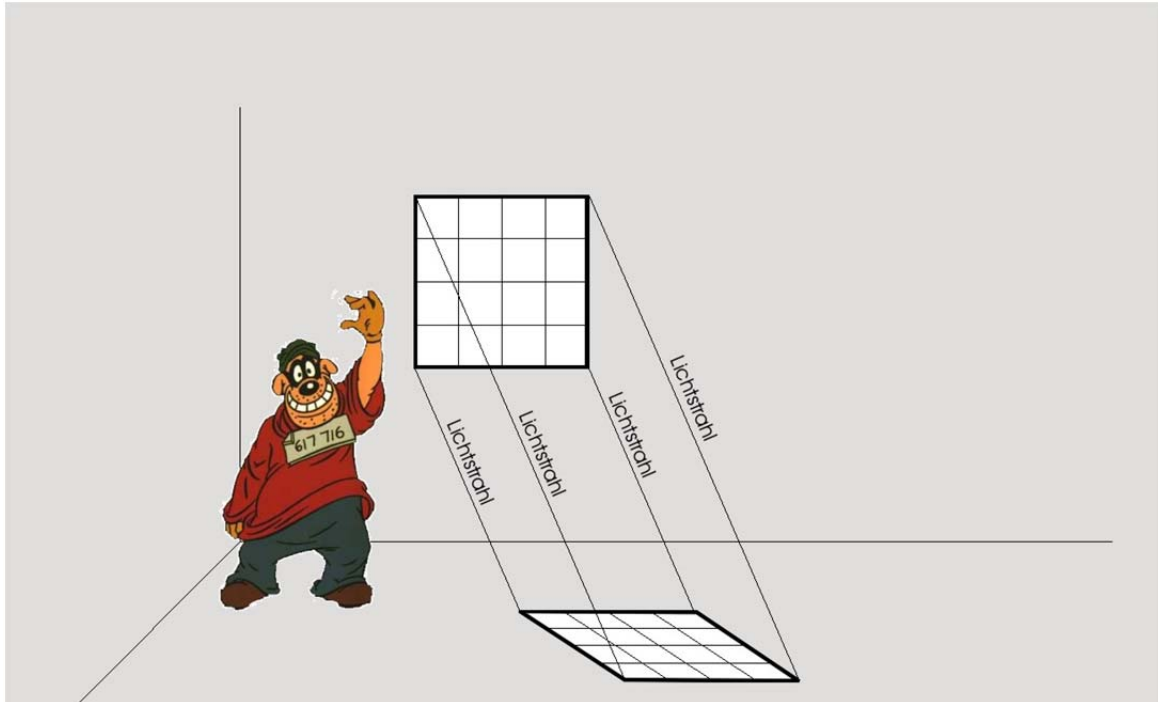
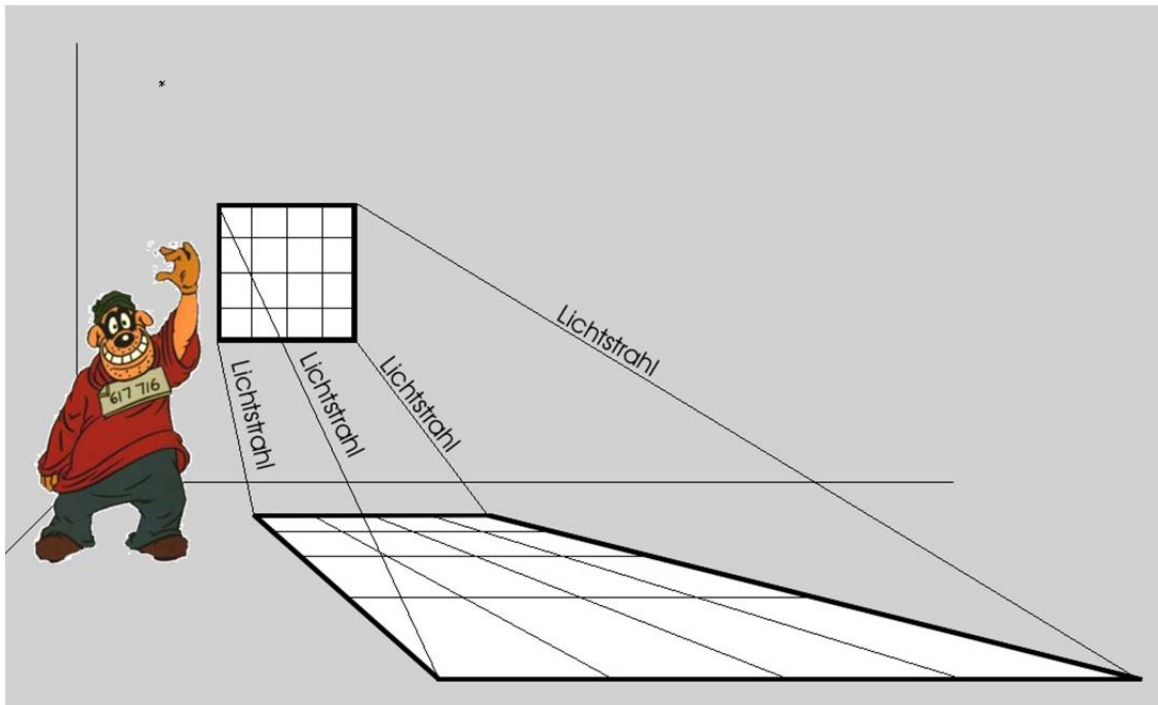


Bild 2: Bild des Gitters bei Scheinwerferlicht in der Nacht



Fragen zu Bild 1:

Welche Lage haben die Lichtstrahlen, die das Fenster abbilden zueinander?

.....
.....

Was für eine Figur hat das Bild des Fensters am Boden?

.....
.....

Was passiert mit den zueinander parallelen Gitterstäben im Bild?

.....
.....

Was passiert mit den gleich langen parallelen Gitterstäben im Bild?

.....
.....

Die Gitterstäbe teilen das Fenster jeweils in 4 gleich große Teile. Was passiert im Bild mit diesen Unterteilungen?

.....
.....

Fragen zu Bild 2:

Welche Lage haben die Lichtstrahlen, die das Fenster abbilden zueinander?
Verlängere sie aus dem Fenster hinaus!

.....
.....

Was für eine Figur hat das Bild des Fensters am Boden?

.....
.....

Was passiert mit den zueinander parallelen Gitterstäben im Bild?

.....
.....

Was passiert mit den gleich langen parallelen Gitterstäben im Bild?

.....
.....

Die Gitterstäbe teilen das Fenster jeweils in 4 gleich große Teile. Was passiert im Bild mit diesen Unterteilungen?

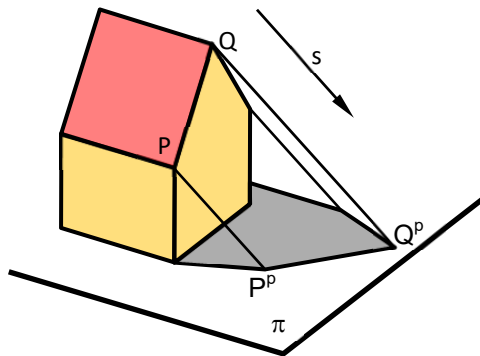
.....
.....

Projektionsarten:

Man unterscheidet zwei große Typen von Projektionen.

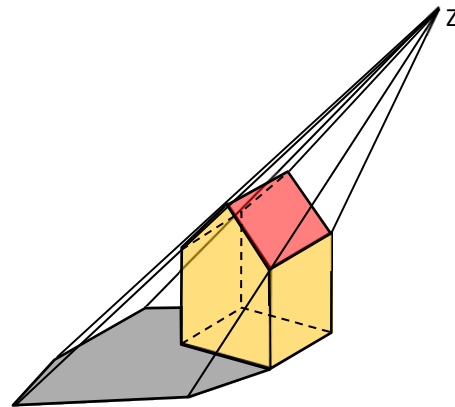
1) Die **Parallelprojektion:**

Die Lichtstrahlen sind parallel zueinander, weil sie von unendlich weit herkommen. Sie entspricht etwa dem Schattenwurf bei Sonneneinstrahlung. Siehe Bild 1 des Panzerknackers.



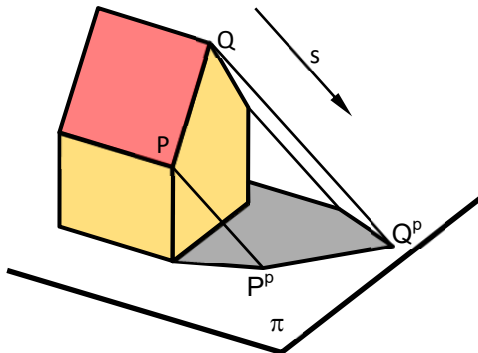
2) Die **Zentralprojektion:**

Die Lichtstrahlen gehen durch einen erreichbaren Punkt. Sie entspricht dem Schattenwurf einer Lampe. Siehe Bild 2 des Panzerknackers.



Parallelprojektion

Wir beschäftigen uns mit der Parallelprojektion und ihren Eigenschaften. Vergleiche dazu die beiden Panzerknackerbilder.



Eigenschaften der Parallelprojektion

Parallele Geraden sind auch im Bild parallel.

Paralleltreue

Mittelpunkte und andere Unterteilungen von Strecken bleiben auch im Bild Mittelpunkte bzw. Unterteilungen im gleichen Verhältnis.

Teilverhältnistreue

Parallele gleich lange Strecken sind auch im Bild parallel und gleich lang.

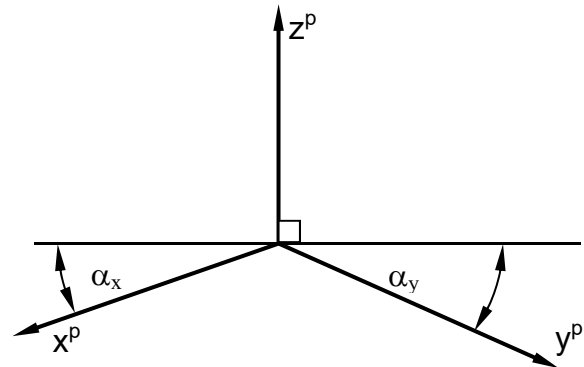
Figuren, die parallel zur Bildebene liegen, erscheinen in wahrer Größe

Da diese Eigenschaften der Parallelprojektion sicherlich andere sind, als die der Zentralprojektion und man aus dem Bild aber doch eindeutig erkennen können sollte, welches Objekt gezeichnet wurde, fügt man den Bildern immer einen so genannten Abbildungs-anzeiger hinzu. Dieser wird wie eine Hochzahl geschrieben. Der Abbildungsanzeiger bei Parallelprojektion kann sein p , s , n . Wir werden noch genauer hören, welcher exakt verwendet wird. Bis dahin verwenden wir bei Parallelprojektionen den Abbildungsanzeiger p .

Festlegung der Bilder von Koordinatenachsen bei Parallelprojektionen:

Zunächst muss man die **Winkel** fixieren, die die Bilder der **Koordinatenachsen** miteinander einschließen.

Entweder gibt man $\langle x^p z^p \rangle$ und $\langle y^p z^p \rangle$ direkt an, oder man gibt α_x bzw. α_y (siehe Zeichnung) an.



Die $\frac{\text{Länge der Strecke in der Projektion}}{\text{Länge der Strecke im Raum}}$ nennt man Verzerrungsfaktor v

v_x ist der Verzerrungsfaktor in Richtung der x-Achse

v_y ist der Verzerrungsfaktor in Richtung der y-Achse

v_z ist der Verzerrungsfaktor in Richtung der z-Achse

Das Verhältnis der Verzerrungsfaktoren der drei Koordinatenachsen muss zur Festlegung einer Axonometrie auch angegeben werden.

Durch die Angabe von $v_x : v_y : v_z$ und die Angabe der Winkel zwischen den Koordinatenachsen ist schließlich die Axonometrie bis auf den Maßstab bestimmt.

Beispiel: Zeichne das Bild eines Würfels im Heft mit $\alpha_x = 10^\circ$ und $\alpha_y = 15^\circ$

$$v_x : v_y : v_z = 4 : 3 : 5$$

Zeichenblatt Würfelschlange:

Konstruiere in einem Koordinatensystem mit

$\alpha_x = 7^\circ$ und $\alpha_y = 42^\circ$, $v_x : v_y : v_z = 1 : \frac{1}{2} : 1$ mehrere Würfel.

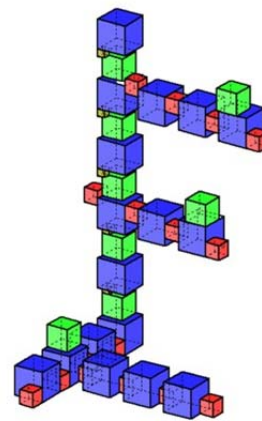
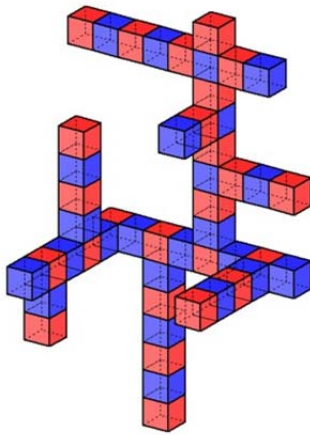
Es sollen immer 2 Würfel aneinander grenzen und die Verschiebungen sollen ausschließlich in Richtung der Koordinatenachsen stattfinden.

Die fertige Würfelschlange soll Verschiebungen in Richtung jeder Koordinatenachse aufweisen und soll das Zeichenblatt ausfüllen.

Arbeiten, bei denen Würfel verschiedener Kantenlänge vorkommen, sind schwieriger und werden dadurch höher bewertet.

Format: **DIN A4 hoch**

Hier siehst du Schülerarbeiten als Anregung für deine eigene Würfelschlange!

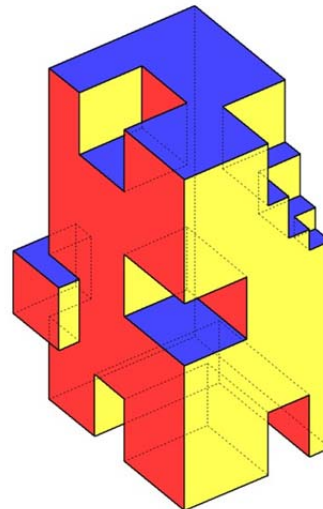
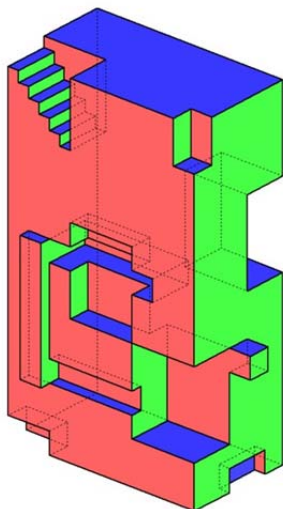


Zeichenblatt Löcherquader

Stelle einen Quader mit den Abmessungen 7 cm x 9 cm x 16 cm in einer Parallelprojektion mit $\alpha_x = 20^\circ$, $\alpha_y = 25^\circ$, $v_x = v_y = v_z = 1$ dar. Der Ursprung des Koordinatensystems sei 100mm vom linken und 100mm vom unteren Blattrand entfernt. Anschließend konstruiere beliebige quader- oder prismenförmige Ausnehmungen, wobei nur x-, y- und z-parallele Kanten auftreten sollen. Du darfst auch Quader mit koordinatenachsenparallelen Kanten auf dein Objekt aufsetzen. Versuche einen interessanten Löcherquader zu entwerfen.

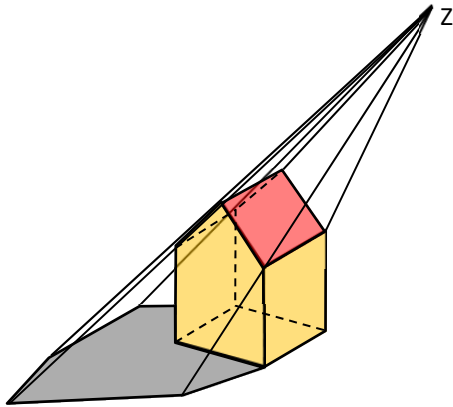
Färbe alle Vielecke, die zur xy-Ebene parallel sind, in einer Farbe, die zur yz-Ebene parallel sind, in einer zweiten Farbe, und die zur xz-Ebene parallel sind, in einer dritten Farbe an.

Format: **DIN A4 hoch**



Zentralprojektion

Wir beschäftigen mit der Zentralprojektion und ihren Eigenschaften.
Vergleiche dazu die beiden Panzerknackerbilder.



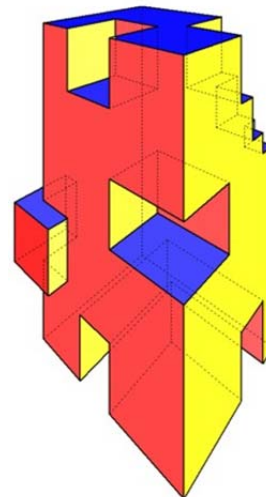
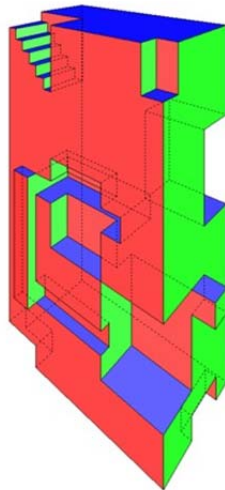
Eigenschaften der Zentralprojektion

- 1) Parallele Geraden sind im Bild nicht parallel. Sie schneiden einander in einem gemeinsamen Punkt, dem **Fluchtpunkt**.
- 2) Mittelpunkte und andere Unterteilungen von Strecken bleiben im Bild nicht Mittelpunkte bzw. Unterteilungen im gleichen Verhältnis.
- 3) Figuren, die parallel zur Bildebene liegen, erscheinen nicht in wahrer Größe, sind aber zentrisch ähnlich zu ihrem Ausgangsobjekt.

Da diese Eigenschaften der Zentralprojektion sicherlich andere sind, als die der Parallelprojektion und man aus dem Bild aber doch eindeutig erkennen können sollte, welches Objekt gezeichnet wurde, fügt man den Bildern immer einen so genannten Abbildungs-anzeiger hinzu. Dieser wird wie eine Hochzahl geschrieben. Der Abbildungsanzeiger bei Zentralprojektion ist ein c .

Zeichenblatt Löcherquader Perspektive

Zeichne einen ähnlichen Löcherquader, wie du ihn schon in Parallelprojektion gezeichnet hast, jetzt in Zentralprojektion.
Hier zwei Beispiele



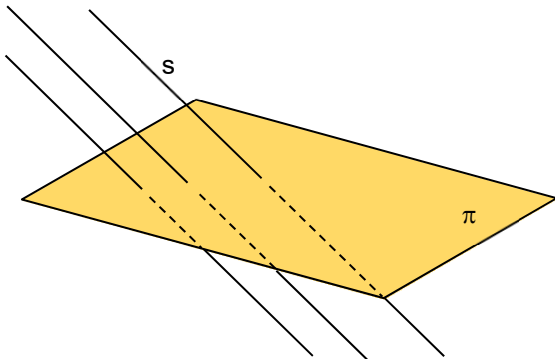
Zeichne auf ein A4 Blatt im Querformat folgende Punkte:

A [180 / 10]	F_x [290 / 175]	B [240 / ...]	D [80 / ...]	C [ergibt sich]
\bar{A} [180 / 140]	F_y [10 / 175]	\bar{B} [240 / ...]	\bar{D} [80 / ...]	\bar{C} [ergibt sich]

Verbinde A und \bar{A} mit den Fluchtpunkten F_x und F_y . Schneide die Linien, auf denen D und \bar{D} bzw. B und \bar{B} liegen, mit diesen Verbindungsgeraden, um D, \bar{D} , B und \bar{B} zu erhalten. Ermittle mit Hilfe der beiden Fluchtpunkte durch „perspektivisches Parallelverschieben“ die Punkte C und \bar{C} . Schneide nun aus diesem Quader ebenso wie bei der Parallelprojektion quaderförmige Löcher aus. Auch hier sollen nur x-, y- und z-parallele Kanten auftreten.

Arten von Parallelprojektionen

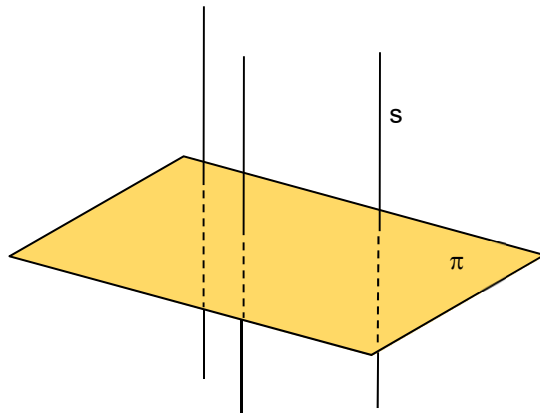
a) Die Schrägprojektion



Die zueinander parallelen Sehstrahlen treffen in einem „schrägen“ Winkel (kein rechter Winkel) auf die Bildebene π .

Der Abbildungsanzeiger ist ein hochgestelltes s.

b) Die Normalprojektion



Die zueinander parallelen Sehstrahlen treffen im rechten Winkel (normal) auf die Bildebene π .

Der Abbildungsanzeiger ist ein hochgestelltes n oder ' oder '' oder '''

Sowohl Normal- als auch Schrägprojektion sind Parallelprojektionen und haben daher deren Eigenschaften.

Arbeitsblatt Würfelprojektionen

Zeichne einen Würfel mit $a = 6 \text{ cm}$ in folgenden drei Parallelprojektionen:

1) $\alpha_x = 30^\circ$ $\alpha_y = 40^\circ$ $v_x = 2/3$ $v_y = 1/2$ $v_z = 1$

2) $\alpha_x = 20^\circ$ $\alpha_y = 10^\circ$ $v_x = 1/2$ $v_y = 1$ $v_z = 1/4$

3) $\alpha_x = 7^\circ$ $\alpha_y = 42^\circ$ $v_x = 1$ $v_y = 1/2$ $v_z = 1$

Was kannst du feststellen?

.....
.....

Sehen alle 3 Würfel tatsächlich wie Würfel aus?

.....
.....

Würde jemand, der von Geometrie, nicht so wie du, wenig Ahnung hat, glauben, dass alle 3 Bilder Projektionen eines Würfels sind?

.....
.....

Folgerung: Manche Darstellungen liefern sehr starke Verzerrungen und sind daher „ungünstig“. (Ähnlich wie ein Schatten an Sommerabenden, der auch extrem lang, also verzerrt ist.) Daher hat man sich beim Technischen Zeichnen auf einige genormte Darstellungen geeinigt, deren Bilder immer „schön“ sind.

Genormte axonometrische Darstellungen:

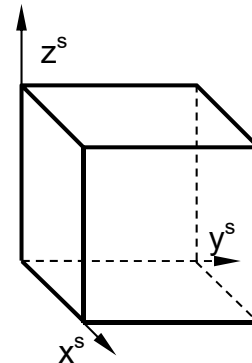
Da man nie wissen kann, ob die ausgesuchten Winkel und Verkürzungen ein günstiges Bild liefern, haben sich bestimmte Risse und Achsenbilder in der Technik durchgesetzt.

1) Der Frontalriss (Kavalierriss):

Er entsteht durch Schrägprojektion auf die yz -Ebene (oder eine dazu parallele Ebene). Dadurch erscheinen Figuren, die parallel zur yz -Ebene liegen, unverzerrt.

α_x und v_x muss man angeben, sie sind von der Projektionsrichtung abhängig.

Im Normblatt **ÖNORM A 6061** ist der **genormte Frontalriss** festgelegt. Hier sind **$\alpha_x = 135^\circ$ und $v_x = 0,5$** festgelegt.

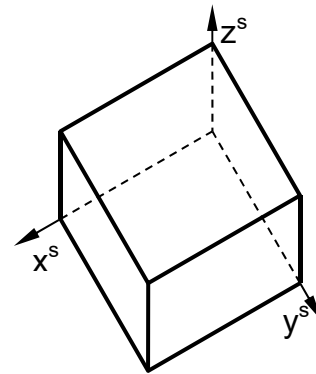


2) Der Horizontalriss (Militärriss):

Er entsteht durch Schrägprojektion auf die xy -Ebene (oder eine dazu parallele Ebene). Dadurch erscheinen Figuren, die parallel zur xy -Ebene liegen unverzerrt.

α_x oder α_y und v_z muss man angeben, sie sind von der Projektionsrichtung abhängig.

Im Normblatt **ÖNORM A 6061** ist der **genormte Horizontalriss** festgelegt. Hier sind **$\alpha_x = 30^\circ$ und $v_z = 0,5$** festgelegt



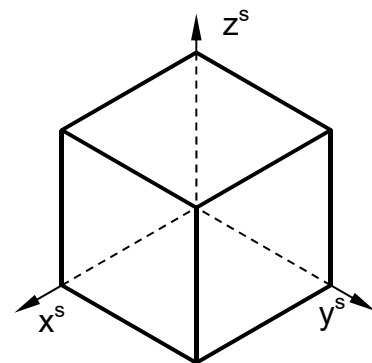
3) Die (vereinfachte) Isometrie:

Sie entsteht durch Normalprojektion (Daher hat sie den Abbindeanzeiger ⁿ) auf eine Ebene, die zu allen drei Koordinatenachsen gleich geneigt ist.

Daher gilt:

$$\alpha_x = \alpha_y = 30^\circ \quad \text{und}$$

$$v_x : v_y : v_z = 1 : 1 : 1 \quad (\text{alles unverzerrt})$$



4) Die (vereinfachte) Dimetrie:

Sie entsteht durch Normalprojektion. Es gilt:

$$\alpha_x = 7^\circ \quad \alpha_y = 41,5^\circ \quad (\text{wird mit } 42^\circ \text{ gezeichnet}) \quad \text{und}$$

$$v_x : v_y : v_z = 1 : 0,5 : 1$$

Auf TZ - Dreiecken findest du die Winkel 7° und 42° extra gekennzeichnet.

